

# PT\_50: — Primalidade estrutural das classes $U_c$ e o grau de $\tilde{n}$

Víctor Estrada Díaz

UNIHOLOG

## Resumo

Em PT\_49 foi introduzida a ideia de uma classe  $U_c$  como o conjunto de expressões que determinam uma mesma constante  $c$ .

Este documento continua essa construção e coloca uma pergunta mais profunda: se uma constante fica representada por uma classe  $U_c$ , essa classe pode ser considerada primária, ou depende estruturalmente de outras classes?

A questão formula-se mediante uma noção de primalidade estrutural e mediante a ordem estrutural de dependência:

$\text{osd}(U_c)$ .

O caso central é a constante geométrica  $\tilde{n}$ , definida no quadro UNIHOLOG como uma relação entre duas geometrias. Embora possa escrever-se como

$$\tilde{n} = 4l_p^2,$$

o seu sentido não procede de  $G$ , mas de uma relação geométrica prévia. Por isso, a questão não é se  $\tilde{n}$  pode escrever-se usando  $l_p$ , mas se  $U_{\tilde{n}}$  é uma classe prima ou uma classe composta.

## 1. Ponto de partida

Seja  $c$  uma constante.

Definimos  $U_c$  como o conjunto de expressões que determinam exatamente o mesmo valor  $c$ :

$$U_c = \{A: \text{valor}(A) = c\}.$$

Duas expressões  $A$  e  $B$  pertencem à mesma classe  $U_c$  se ambas determinam o mesmo valor:

$$A \sim_c B \Leftrightarrow \text{valor}(A) = \text{valor}(B) = c.$$

Esta definição não identifica os procedimentos entre si. Uma expressão algébrica exata, uma sucessão, uma integral, uma derivada ou uma fração contínua podem pertencer à mesma classe se determinarem o mesmo valor.

Por exemplo:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

são expressões distintas, mas ambas pertencem a  $U_e$ .

## 2. Expressões primárias e expressões derivadas

Nem todas as expressões de uma classe  $U_c$  têm o mesmo valor estrutural.

Se uma expressão se obtém por uma transformação trivial de outra expressão já conhecida, ela não abre uma via nova para a constante.

Por exemplo, se

$$A \in U_c,$$

então também:

$$A + 0 \in U_c,$$

$$A \cdot 1 \in U_c,$$

$$\frac{2A}{2} \in U_c.$$

Estas expressões pertencem formalmente a  $U_c$ , mas não são primárias.

Chamaremos expressão primária de  $U_c$  a uma expressão que determina  $c$  e que não se apresenta como uma simples transformação trivial de outra expressão já incluída no catálogo.

Esta noção é relativa ao conhecimento disponível. Uma expressão pode parecer primária até que se encontre uma derivação que a conecte com outra expressão anterior.

Portanto, definimos provisoriamente:

$$U_c^{\text{prim}} = \{A \in U_c : A \text{ não é derivada trivial de outra expressão conhecida de } U_c\}.$$

### 3. Geração entre classes

Seja  $B$  uma família de classes:

$$B = \{U_{c_1}, U_{c_2}, \dots, U_{c_k}\}.$$

Diremos que uma constante  $c$  é gerável a partir de  $B$  se existe uma função admissível  $F$  tal que:

$$c = F(c_1, c_2, \dots, c_k).$$

Nesse caso:

$$U_c \subseteq \text{Gen}(B).$$

Aqui  $\text{Gen}(B)$  representa o conjunto de classes obteníveis a partir de  $B$  mediante operações admitidas.

Essas operações podem incluir soma, produto, quociente, potências, raízes, limites, séries, produtos infinitos, integrais, derivadas ou funções especiais, desde que estejam bem definidas e justificadas.

Por exemplo, se:

$$A \in U_{\alpha}$$

e

$$B \in U_{\beta},$$

então:

$$A + B \in U_{\alpha + \beta},$$

$$AB \in U_{\alpha\beta},$$

e, se  $\beta \neq 0$ :

$$\frac{A}{B} \in U_{\alpha/\beta}.$$

## 4. Primalidade estrutural

A analogia com os números primos aparece quando perguntamos se uma classe pode obter-se a partir de outras.

Um número primo não se decompõe como produto não trivial de inteiros menores.

De modo análogo, uma classe  $U_c$  pode chamar-se estruturalmente prima se não se obtém como combinação não trivial de outras classes independentes.

Definimos:

$U_c$  é prima relativamente a  $B$

se:

$c \notin \text{Gen}(B \setminus \{U_c\})$ .

Isto não significa que  $U_c$  careça de estrutura interna.

Uma classe prima pode conter muitas expressões:

$$A_1, A_2, A_3, \dots \in U_c.$$

O que se nega não é a multiplicidade interna de expressões, mas a dependência externa relativamente a outras classes.

## 5. Desenvolvimento interno mediante $N$

Toda constante computável admite pelo menos uma representação mediante uma sucessão indexada por números naturais.

Isto é, para uma constante computável  $c$ , existe uma sucessão racional ou real:

$$a: N \rightarrow Q$$

tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c.$$

Portanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in U_c.$$

Isto mostra que uma classe pode ser estruturalmente prima e, ao mesmo tempo, admitir desenvolvimentos internos infinitos.

A primalidade não exclui o desenvolvimento.

Só exclui a dependência generativa não trivial relativamente a outras classes.

## 6. Ordem estrutural de dependência

Definimos a ordem estrutural de dependência de uma classe  $U_c$  como:

$\text{osd}(U_c)$ .

Informalmente,  $\text{osd}(U_c)$  mede o número mínimo de classes necessárias para determinar  $U_c$  mediante uma relação estrutural fechada.

Uma formulação possível é:

$$\text{osd}(U_c) = \min \{k : \exists R(c, c_1, \dots, c_k) = 0\},$$

onde a relação  $R$  deve ser não trivial e não deve poder reduzir-se eliminando uma das classes participantes.

Se:

$$\text{osd}(U_c) = 1,$$

então  $U_c$  comporta-se como uma classe primária.

Se:

$$\text{osd}(U_c) > 1,$$

então  $U_c$  aparece como parte de uma relação mínima com outras classes.

## 7. A identidade de Euler

A identidade de Euler é:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Esta relação conecta as classes:

$$U_e, \quad U_i, \quad U_\pi, \quad U_1, \quad U_0.$$

Não afirma que:

$$U_e = U_\pi.$$

Também não afirma que  $e$  e  $\pi$  sejam a mesma constante.

O que mostra é que existe uma relação estrutural fechada na qual estas classes aparecem simultaneamente.

Se uma delas for tomada como incógnita, as outras são necessárias para reconstruí-la dentro dessa relação.

Por exemplo, formalmente:

$$e^{i\pi} = -1.$$

Se se tenta isolar  $\pi$ , aparece:

$$\pi = \frac{\log(-1)}{i},$$

mas esta expressão exige já a estrutura complexa, a unidade, o zero, a exponencial e uma escolha de ramo do logaritmo.

Portanto, Euler não elimina a independência de  $e$ ,  $\pi$  ou  $i$ . Mostra uma relação mínima onde nenhuma dessas classes pode retirar-se sem alterar a estrutura.

## 8. Independência e relação não são a mesma coisa

Duas classes podem ser independentes e, ainda assim, estar relacionadas.

A independência generativa afirma que uma classe não se obtém a partir de outra mediante as regras admitidas:

$$U_a \not\subseteq \text{Gen}(U_b).$$

Mas pode existir uma relação:

$$R(a, b) = 0.$$

Portanto, deve distinguir-se:

dependência generativa

de:

relação estrutural.

A identidade de Euler é precisamente um exemplo de relação estrutural profunda entre classes que não se reduzem de maneira trivial umas às outras.

## 9. O caso de $\tilde{n}$

Em UNIHOLOG, a constante  $\tilde{n}$  apresenta-se como uma constante geométrica.

Pode escrever-se:

$$\tilde{n} = 4l_p^2 .$$

Mas esta escrita não deve interpretar-se necessariamente no sentido:

$$G \rightarrow l_p \rightarrow \tilde{n} .$$

No quadro UNIHOLOG, a direção conceptual é:

$$\text{relação entre duas geometrias} \rightarrow \tilde{n} \rightarrow l_p^2 \rightarrow G .$$

Isto é,  $\tilde{n}$  não se introduz como uma constante derivada de  $G$ , mas como uma relação geométrica prévia.

Depois, se se usa:

$$l_p^2 = \frac{\hbar G}{c^3} ,$$

então:

$$\tilde{n} = \frac{4\hbar G}{c^3} .$$

E portanto:

$$G = \frac{\tilde{n} c^3}{4\hbar} .$$

Assim, neste quadro,  $G$  não é primária relativamente a  $\tilde{n}$ .

Pelo contrário:

$$U_G \subseteq \text{Gen} \left( U_{\tilde{n}}, U_c, U_h \right).$$

Portanto:

$U_G$  é composta relativamente a  $U_{\tilde{n}}$ .

## 10. Anticircularidade de $\tilde{n}$

A objecção de circularidade diz:

$$\tilde{n} = 4l_p^2$$

e:

$$l_p^2 = \frac{\hbar G}{c^3}.$$

Portanto, pareceria que  $\tilde{n}$  depende de  $G$ .

Mas essa objecção só é válida se  $G$  for tomado como premissa.

Se  $\tilde{n}$  se obtém independentemente como relação geométrica entre duas estruturas, então  $G$  não é premissa, mas consequência:

$$G = \frac{\tilde{n}c^3}{4\hbar}.$$

A mesma igualdade pode ler-se em duas direcções.

A leitura padrão é:

$$G \rightarrow l_p^2 \rightarrow \tilde{n}.$$

A leitura UNIHOLOG é:

$$\tilde{n} \rightarrow l_p^2 \rightarrow G.$$

Portanto, não há circularidade se a derivação de  $\tilde{n}$  é geométrica e independente de  $G$ .

## 11. A pergunta aberta

Ainda não conhecemos o grau estrutural de  $\tilde{n}$ .

A pergunta é:

$$\text{osd}(U_{\tilde{n}}) = 1$$

ou:

$$\text{osd}(U_{\tilde{n}}) > 1 .$$

Se:

$$\text{osd}(U_{\tilde{n}}) = 1 ,$$

então  $U_{\tilde{n}}$  seria uma classe primária.

Nesse caso,  $\tilde{n}$  seria um valor geométrico que não depende de outras classes para ficar determinado.

Se:

$$\text{osd}(U_{\tilde{n}}) > 1 ,$$

então deverá existir uma relação matemática ou geométrica mínima:

$$R(\tilde{n}, c_1, c_2, \dots, c_k) = 0 .$$

Nesse caso,  $\tilde{n}$  não seria uma constante primária isolada, mas uma constante emergente de uma relação estrutural mais profunda.

## 12. Consequência conceptual

A busca de  $\tilde{n}$  não consiste em procurar uma combinação numérica qualquer.

A busca correta é:

$$\exists R: R(\tilde{n}, c_1, \dots, c_k) = 0$$

onde  $R$  seja:

- não trivial;
- mínima;
- geometricamente interpretável;
- independente de  $G$  como premissa;
- capaz de determinar  $\tilde{n}$ .

Se tal relação for encontrada, então terá sido identificada a ordem estrutural de dependência de  $U_{\tilde{n}}$ .

Se tal relação não existe e  $\tilde{n}$  depende apenas de si mesma como relação geométrica primária, então:

$$\text{osd}(U_{\tilde{n}}) = 1.$$

## 13. Conclusão

PT\_49 permitiu definir classes de expressões  $U_c$ .

PT\_50 introduz uma nova pergunta:

quais classes são estruturalmente primas?

A identidade de Euler mostra que várias classes podem estar relacionadas numa estrutura mínima sem se reduzirem trivialmente umas às outras.

O caso de  $\tilde{n}$  coloca uma pergunta análoga:

$$\text{osd}(U_{\tilde{n}}) = 1 \quad \text{ou} \quad \text{osd}(U_{\tilde{n}}) > 1$$

Se  $U_{\tilde{n}}$  é prima, então  $\tilde{n}$  expressa uma constante geométrica irreduzível.

Se não é prima, então algum dia deverá encontrar-se uma relação matemática ou geométrica mínima que a determine.

Em ambos os casos,  $G$  fica situado como uma classe derivada relativamente a  $\tilde{n}$ , não como o seu fundamento.