

ES_49: — El nexso discreto-continuo mediante clases de equivalencia

UNIHOLOG

Este documento reconstruye el desarrollo de ES_49 sobre el nexo entre lo discreto y lo continuo, formulado sin identificar falsamente N con R .

El punto central no es que el conjunto de los naturales y el conjunto de los reales sean equivalentes como estructuras. No lo son. El punto central es más preciso: una construcción discreta indexada por N y una construcción continua definida sobre R pueden determinar exactamente un mismo objeto matemático de R .

Ese objeto común funciona como nexo.

En ES_49 este nexo se expresa mediante familias o clases de equivalencia del tipo $U_e, U_\pi, U_\varphi, U_{\tilde{n}}, U_g$ y, en forma general, U_{f_i} .

Todas las fórmulas de este documento se escriben usando únicamente

`<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="inline"><mrow>`
`<mo>.</mo><mo>.</mo><mo>.</mo></mrow></math>` para
 expresiones inline y `<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML"`
`display="inline"><mrow><mo>.</mo><mo>.</mo><mo>.</mo>`
`</mo></mrow></math>` para bloques.

1. Punto de partida

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ una constante real.

Una misma constante puede aparecer mediante expresiones de naturaleza diferente.

Por ejemplo, puede aparecer como límite de una sucesión:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha,$$

donde el índice n pertenece a $\mathbb{N}$.

También puede aparecer mediante un proceso continuo:

$$\lim_{dx \rightarrow 0} Q(F, x, dx) = \alpha,$$

donde x y dx pertenecen al marco de variación de R .

La primera construcción usa una estructura discreta:

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

La segunda usa una estructura continua:

$$dx \rightarrow 0.$$

Sin embargo, si ambas construcciones determinan el mismo valor α , entonces ambas pertenecen a una misma clase respecto de su valor.

El nexo no es una identidad entre dominios.

El nexo es el valor común.

2. Distinción fundamental entre expresión finita, proceso límite y valor

Antes de definir las clases U_α , conviene separar tres niveles.

2.1 Expresión finita dependiente de un parámetro

Una expresión como

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

depende de n .

Para un valor finito de n , en general no es igual a su límite.

Por tanto,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \neq e$$

para todo n finito.

2.2 Proceso límite

El proceso completo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

sí determina exactamente e .

La expresión finita no pertenece a U_e como expresión exacta, pero el proceso límite completo sí pertenece a U_e .

2.3 Valor determinado

El valor determinado por el proceso es el objeto matemático:

e .

Así, ES_49 distingue:

1. aproximaciones finitas;
2. procesos límite;

3. valores exactos determinados por esos procesos.

Esta distinción evita confundir una sucesión de aproximaciones con la constante misma.

3. Definición de U_α

Sea $\alpha \in R$.

Definimos U_α como el conjunto de expresiones, definiciones, procesos o construcciones matemáticas que determinan exactamente el valor α .

Formalmente:

$$U_\alpha = \{A: \text{valor}(A) = \alpha\}.$$

Aquí $\text{valor}(A)$ debe interpretarse como el valor matemático determinado por A , siempre que dicho valor esté bien definido.

Si A es una expresión exacta, entonces $\text{valor}(A)$ es su valor directo.

Si A es un proceso límite, entonces $\text{valor}(A)$ es el límite, siempre que exista.

Por ejemplo:

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

determina e .

También:

$$B = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

determina e .

Por tanto:

$A \in U_e$

y

$B \in U_e$.

4. Relación de equivalencia asociada

Para una constante fija $\alpha \in R$, definimos la relación:

$A \sim_\alpha B \Leftrightarrow \text{valor}(A) = \text{valor}(B) = \alpha$.

Esta relación identifica expresiones por su valor común, no por su forma sintáctica ni por su procedimiento de obtención.

Teorema 1 — $\sim_\alpha$ es una relación de equivalencia

Sea $\alpha \in R$ y sea U_α el conjunto de construcciones que determinan α .
Entonces $\sim_\alpha$ es una relación de equivalencia sobre U_α .

Demostración

Reflexividad:

Si $A \in U_\alpha$, entonces

$\text{valor}(A) = \alpha$.

Por tanto:

$A \sim_\alpha A$.

Simetría:

Si $A \sim_\alpha B$, entonces:

$\text{valor}(A) = \text{valor}(B) = \alpha$.

Por igualdad simétrica:

$$\text{valor}(B) = \text{valor}(A) = \alpha .$$

Luego:

$$B \sim_{\alpha} A .$$

Transitividad:

Si $A \sim_{\alpha} B$ y $B \sim_{\alpha} C$, entonces:

$$\text{valor}(A) = \text{valor}(B) = \alpha$$

y

$$\text{valor}(B) = \text{valor}(C) = \alpha .$$

Por tanto:

$$\text{valor}(A) = \text{valor}(C) = \alpha .$$

Luego:

$$A \sim_{\alpha} C .$$

Así, $\sim_{\alpha}$ es reflexiva, simétrica y transitiva. Por consiguiente, es una relación de equivalencia.

5. Nexo entre N y R

Sea $\alpha \in R$.

Supongamos que existe una sucesión $(a_n)_{n \in N}$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha .$$

Supongamos además que existe un proceso continuo asociado a una función F tal que:

$$\lim_{dx \rightarrow 0} Q(F, x, dx) = \alpha .$$

Entonces ambas construcciones pertenecen a U_α .

La situación puede representarse esquemáticamente como:

$$N \rightarrow \overset{n}{\alpha} \overset{\infty dx}{\leftarrow} R \rightarrow 0$$

Esta escritura no significa:

$$N = R .$$

Tampoco significa:

$$N \cong R$$

como conjuntos, espacios topológicos, cuerpos o estructuras de orden.

Significa únicamente que dos procedimientos definidos desde naturalezas distintas pueden determinar el mismo elemento α de R .

Teorema 2 — Nexo discreto-continuo

Sea $\alpha \in R$. Si existe una construcción discreta A_N indexada por N y una construcción continua A_R definida sobre R tales que:

$$\text{valor} (A_N) = \alpha$$

y

$$\text{valor} (A_R) = \alpha,$$

entonces:

$$A_N \sim_\alpha A_R .$$

En consecuencia, A_N y A_R pertenecen a la misma clase U_α .

Demostración

Por hipótesis:

$$\text{valor}(A_N) = \alpha$$

y

$$\text{valor}(A_R) = \alpha .$$

Entonces:

$$\text{valor}(A_N) = \text{valor}(A_R) = \alpha .$$

Por definición de $\sim_\alpha$:

$$A_N \sim_\alpha A_R .$$

Por tanto:

$$A_N, A_R \in U_\alpha .$$

Queda probado.

6. Aplicación a e

La constante e constituye un ejemplo central porque aparece de forma natural tanto en construcciones discretas como en caracterizaciones continuas.

6.1 Construcción discreta

Consideremos la sucesión:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in N .$$

Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

La construcción está indexada por valores discretos:

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

El valor e aparece como límite cuando:

$$n \rightarrow \infty.$$

Por tanto:

$$N \rightarrow^{\infty} e.$$

Esta expresión no afirma que $e \in N$.

Afirma que una sucesión indexada por N determina, en el límite, un elemento de R .

6.2 Construcción por serie

También se tiene:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Esta representación también posee una estructura discreta, pues está indexada por $k \in N$.

El objeto determinado es el mismo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

6.3 Caracterización continua

Consideremos la función:

$$f(x) = e^x.$$

Su derivada se define por:

$$f'(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}.$$

Sustituyendo:

$$f'(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx}.$$

Factorizando:

$$f'(x) = e^x \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{e^{dx} - 1}{dx}.$$

La base e se caracteriza por:

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{e^{dx} - 1}{dx} = 1.$$

Por tanto:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x.$$

En particular:

$$e = e^1.$$

Aquí e aparece dentro de una estructura continua, ligada al límite diferencial:

$$dx \rightarrow 0.$$

Así:

$$R \xrightarrow{dx \rightarrow 0} e.$$

6.4 Clase U_e

Definimos:

$$U_e = \{E_i : \text{valor}(E_i) = e\}.$$

Ejemplos de elementos de U_e son:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

$$\exp(1),$$

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = 1$$

como caracterización indirecta de e , es decir, e es el único número real positivo que satisface:

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = 1 .$$

No todas estas expresiones tienen la misma forma. Algunas son límites, otras series, otras valores funcionales y otras caracterizaciones implícitas.

Sin embargo, todas determinan e .

Por tanto, pertenecen a la misma clase U_e .

6.5 U_e conocido y U_e desconocido

El conjunto total U_e puede dividirse conceptualmente en dos regiones:

$$U_e = U_e^{\text{conocido}} \cup U_e^{\text{desconocido}} .$$

Aquí U_e^{conocido} representa las expresiones ya identificadas, verificadas o aceptadas como determinaciones de e dentro de un marco matemático dado.

Por ejemplo:

$$\exp(1) \in U_e^{\text{conocido}} .$$

También:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \in U_e^{\text{conocido}} .$$

Y:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in U_e^{\text{conocido}} .$$

En cambio, $U_e^{\text{desconocido}}$ designa las expresiones todavía no descubiertas, no clasificadas o no demostradas como equivalentes a e .

Esta división no es ontológica sino epistemológica.

El valor e no cambia porque una expresión sea conocida o desconocida.

Lo que cambia es nuestro catálogo de expresiones reconocidas.

6.6 Enumeración de expresiones

Si se fija un lenguaje formal con un alfabeto finito o numerable y reglas sintácticas efectivas, el conjunto de expresiones finitas de ese lenguaje es numerable.

Por tanto, es posible enumerarlas sintácticamente:

$$E_1, E_2, E_3, \dots$$

Sin embargo, no toda expresión sintáctica determina un valor real.

Y no siempre existe un procedimiento general que decida, para cualquier expresión suficientemente rica, si:

$$\text{valor}(E_i) = e.$$

Por tanto, puede existir una enumeración sintáctica de candidatos sin que exista una clasificación completa y efectiva de U_e .

Esta observación separa tres cosas:

1. enumerar expresiones posibles;
2. evaluar expresiones bien definidas;
3. demostrar pertenencia a U_e .

Corolario 1 — El catálogo conocido es parcial

El conjunto U_e^{conocido} no agota necesariamente U_e .

Demostración

Por definición, U_e^{conocido} contiene las expresiones cuya pertenencia a U_e ha sido reconocida dentro de un marco dado.

Pero la definición de U_e no exige que sus elementos sean conocidos por nosotros. Solo exige que determinen e .

Por tanto, salvo que se demuestre una caracterización completa del lenguaje y de todos sus valores, no se puede concluir que:

$$U_e^{\text{conocido}} = U_e .$$

Luego el catálogo conocido debe tratarse como parcial.

7. Aplicación a π

La constante π también aparece como nexo entre construcciones discretas y continuas.

7.1 Serie discreta

Una representación clásica es:

$$\pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} .$$

Equivalentemente:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} .$$

Esta construcción está indexada por:

$$n \in N .$$

Luego:

$$N \rightarrow^{\pi} \pi .$$

7.2 Integral continua

También se tiene:

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx .$$

La integral se construye mediante particiones de un intervalo real y el refinamiento de esas particiones.

En términos de escala:

$$\Delta x \rightarrow 0 .$$

Así:

$$R \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \pi .$$

7.3 Clase U_π

Definimos:

$$U_\pi = \{P_i : \text{valor}(P_i) = \pi\} .$$

Entonces pertenecen a U_π :

$$4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} ,$$

$$4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx ,$$

$$\frac{C}{d}$$

cuando C es la longitud de una circunferencia euclídea y d su diámetro.

Estas expresiones no son idénticas como procedimientos, pero son equivalentes respecto del valor que determinan.

Por tanto:

$$N \xrightarrow{n} \pi \xleftarrow{\infty \Delta x} R .$$

Corolario 2 — π como invariante de representaciones

La constante π actúa como invariante entre representaciones geométricas, analíticas, integrales y seriales.

Demostración

Todas las expresiones anteriores determinan el mismo valor π bajo sus hipótesis respectivas.

Por definición de U_π :

$$P_i \in U_\pi \Leftrightarrow \text{valor}(P_i) = \pi .$$

Por tanto, todas pertenecen a la misma clase de equivalencia.

8. Aplicación a φ

Sea φ la razón áurea:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} .$$

Esta constante admite una definición algebraica exacta:

$$\varphi^2 = \varphi + 1 .$$

También aparece como límite de cocientes de números de Fibonacci.

Sea (F_n) la sucesión definida por:

$$F_0 = 0,$$

$$F_1 = 1,$$

y

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} .$$

Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi .$$

La construcción por Fibonacci es discreta, pues depende de $n \in N$.

La construcción algebraica pertenece al cuerpo real.

Definimos:

$$U_\varphi = \{ \Phi_i : \text{valor}(\Phi_i) = \varphi \} .$$

Entonces:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \in U_\varphi$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} \in U_\varphi .$$

De nuevo:

$$N \rightarrow \overset{n}{\varphi} \overset{\infty \text{ algebra}}{\leftarrow} R .$$

La notación anterior es esquemática: no afirma que el álgebra real sea un proceso diferencial. Solo señala que φ puede ser determinado tanto desde una recurrencia discreta como desde una ecuación exacta en R .

9. Sobre $U_{\tilde{n}}$

En ES_49 aparece la necesidad de representar el paso conceptual entre un índice natural n y una forma extendida, interpolada o representada en un entorno continuo. Para ello se introduce la notación $\tilde{n}$.

La interpretación rigurosa debe ser cuidadosa.

No se debe afirmar que un natural n sea idéntico a un real continuo.

Si se puede considerar una aplicación de inclusión:

$$\iota: N \rightarrow R$$

dada por:

$$\iota(n) = n.$$

Esta inclusión permite ver cada número natural como un real particular, pero no convierte a N en R .

También puede considerarse una interpolación o extensión de una sucesión discreta.

Si se tiene una sucesión:

$$a: N \rightarrow R,$$

puede buscarse una función:

$$\tilde{a}: R_{\geq 0} \rightarrow R$$

tal que:

$$\tilde{a}(n) = a_n$$

para todo $n \in N$.

En este contexto, $\tilde{n}$ no representa una igualdad entre lo discreto y lo continuo. Representa una extensión, codificación o interpolación controlada.

Definimos entonces:

$$U_{\tilde{n}} = \{N_i: \text{valor}(N_i) = \tilde{n}\},$$

siempre que $\tilde{n}$ haya sido previamente definido dentro del sistema.

Observación

$U_{\tilde{n}}$ no debe usarse como prueba de que N y R son equivalentes.

Debe usarse como familia de representaciones de una extensión o imagen concreta de un índice discreto dentro de una construcción más amplia.

10. Sobre U_g

Sea g una magnitud real determinada por un modelo.

Por ejemplo, si g representa la aceleración gravitatoria local, entonces no debe tratarse sin más como una constante universal absoluta, porque su valor depende del lugar, de la altura y del modelo físico usado.

En un marco local idealizado se puede fijar:

$$g \approx 9.80665 \text{ m / s}^2 \text{ .}$$

Si el marco fija un valor exacto o convencional de g , entonces puede definirse:

$$U_g = \{G_i \colon \text{valor } (G_i) = g\} \text{ .}$$

Una expresión dinámica posible es:

$$s(t) = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \text{ .}$$

De ella se obtiene:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \text{ .}$$

También puede aparecer mediante una ley de gravitación idealizada:

$$g = \frac{GM}{r^2},$$

bajo las hipótesis de masa central M , distancia r y constante gravitacional G .

Ambas expresiones pertenecen a U_g solo si determinan el mismo valor de g dentro del mismo marco físico y con las mismas condiciones.

Advertencia rigurosa

No es correcto afirmar sin condiciones que todas las expresiones con el símbolo g pertenecen a la misma clase.

Solo pertenecen a U_g aquellas que determinan exactamente el mismo valor fijado por el modelo.

11. Diferenciación e integración como procesos límite

La diferenciación y la integración aparecen en ES_49 como dos modos complementarios de operar con límites.

11.1 Diferenciación

La derivada se define mediante:

$$f'(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}.$$

Este proceso toma una variación:

$$dx$$

y estudia su comportamiento cuando:

$$dx \rightarrow 0.$$

La derivada expresa una razón instantánea de cambio.

11.2 Integración

La integral definida puede construirse como límite de sumas de Riemann:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k .$$

Aquí aparece una suma finita indexada por:

$$k = 1, 2, \dots, n .$$

El paso al continuo se realiza mediante el refinamiento:

$$n \rightarrow \infty$$

y

$$\max_k \Delta x_k \rightarrow 0 .$$

Así, la integral une una estructura discreta de sumas con un objeto continuo de área o acumulación.

11.3 Teorema fundamental del cálculo

Si f es continua en $[a, b]$ y se define:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt ,$$

entonces:

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in (a, b)$.

Además, si F es una primitiva de f , entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

Este resultado conecta diferenciación e integración.

La diferenciación estudia la variación local.

La integración reconstruye la acumulación global.

En ES_49, esta relación refuerza la idea de que procesos aparentemente opuestos pueden ser compatibles dentro de una misma estructura.

12. Clases exactas y clases límite

Para evitar ambigüedad, conviene distinguir dos subfamilias:

$$U_{\alpha}^{\text{exacto}} = \{A: \text{valor}(A) = \alpha\}$$

y

$$U_{\alpha}^{\text{límite}} = \{(A_n): \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \alpha\}.$$

Esta notación requiere cuidado.

Un proceso límite completo puede ser una expresión exacta de α .

Pero los términos finitos del proceso no son, en general, expresiones exactas de α .

Así:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in U_{\alpha}^{\text{exacto}}$$

si el límite existe y vale α .

Pero:

$$A_n \notin U_{\alpha}^{\text{exacto}}$$

para un n finito, salvo que por alguna razón particular $A_n = \alpha$.

Por eso puede escribirse de forma más fina:

$$U_{\alpha} = U_{\alpha}^{\text{directo}} \cup U_{\alpha}^{\text{límite}} \cup U_{\alpha}^{\text{implícito}} \cup U_{\alpha}^{\text{funcional}},$$

donde las categorías pueden solaparse.

13. Generalización a U_{f_i}

Hasta ahora se han considerado constantes. Pero la idea puede generalizarse a funciones.

Sea $f_i: D \rightarrow C$ una función definida sobre un dominio D con codominio C .

Definimos:

$$U_{f_i} = \{F_j: \text{valor}(F_j) = f_i\},$$

donde $\text{valor}(F_j) = f_i$ significa que F_j determina la misma función que f_i sobre el dominio relevante.

Más explícitamente:

$$F_j \in U_{f_i} \Leftrightarrow \forall x \in D, F_j(x) = f_i(x).$$

Si se trabaja con funciones definidas casi en todas partes, distribuciones, clases de equivalencia de funciones o dominios restringidos, debe declararse el criterio de igualdad correspondiente.

Ejemplo

Sea:

$$f(x) = e^x.$$

Entonces pertenecen a U_f :

$$x \mapsto e^x,$$

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

y la solución del problema diferencial:

$$y' = y,$$

$$y(0) = 1.$$

Estas tres representaciones determinan la misma función sobre R .

Por tanto, pertenecen a una misma clase U_f .

Teorema 3 — Equivalencia funcional

Sea D un dominio y sean $F, G: D \rightarrow C$. Si:

$$\forall x \in D, F(x) = G(x),$$

entonces F y G pertenecen a la misma clase de equivalencia funcional.

Demostración

Por hipótesis, F y G tienen el mismo valor para cada punto de D .

Por tanto, determinan la misma función como relación entre elementos de D y elementos de C .

Luego:

$$F \sim_f G.$$

Queda probado.

14. Teoremas y corolarios principales

Teorema 4 — Invariante de valor

Sea $\alpha \in R$. Si A y B son construcciones matemáticas bien definidas y:

$$\text{valor}(A) = \text{valor}(B) = \alpha,$$

entonces A y B son equivalentes respecto de U_α .

Demostración

Es inmediata por la definición de $\sim_\alpha$.

Corolario 3 — Distinción de procedimiento

Dos expresiones pueden pertenecer a la misma clase U_α sin ser el mismo procedimiento.

Demostración

La pertenencia a U_α exige igualdad de valor, no igualdad sintáctica ni igualdad de método.

Por tanto, si dos procedimientos distintos determinan α , ambos pertenecen a U_α aunque sigan siendo procedimientos distintos.

Corolario 4 — No equivalencia estructural de N y R

La existencia de un nexo discreto-continuo para una constante α no implica que N y R sean equivalentes como estructuras.

Demostración

Del hecho de que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

y

$$\lim_{dx \rightarrow 0} Q(F, x, dx) = \alpha$$

solo se sigue que ambas construcciones determinan el mismo valor α .

No se sigue ninguna biyección estructural, homeomorfismo, isomorfismo de cuerpos, equivalencia de orden completo ni igualdad entre N y R .

Por tanto, la conclusión válida es la pertenencia común a U_α , no la identidad entre dominios.

15. Conjeturas y extensiones

Las siguientes ideas deben tratarse como conjeturas o programas de investigación, no como teoremas demostrados en este documento.

Conjetura 1 — Crecimiento abierto de $U_{\alpha}^{\text{conocido}}$

Para constantes matemáticamente ricas como e , π y φ , el conjunto de expresiones conocidas que las determinan puede crecer indefinidamente con nuevos marcos, nuevas identidades y nuevas traducciones entre teorías.

Esto no afirma que U_{α} sea literalmente inagotable en todo lenguaje formal fijado.

Afirma que, desde la práctica matemática, el catálogo reconocido de expresiones puede ampliarse sin que el valor α cambie.

Conjetura 2 — Nodos de compatibilidad

Constantes como e , π y φ pueden interpretarse como nodos de compatibilidad entre regiones distintas de la matemática.

Por ejemplo, π conecta geometría, análisis, trigonometría, series e integración.

e conecta crecimiento, cálculo diferencial, series, límites discretos y ecuaciones diferenciales.

φ conecta álgebra, recurrencias, proporciones y límites de sucesiones.

Esta lectura es estructural y conceptual. No sustituye a las demostraciones particulares de cada identidad.

Conjetura 3 — Extensión UNIHOLOG

En el marco UNIHOLOG, cada familia U_{f_i} puede estudiarse como una red de expresiones equivalentes que revela conexiones entre dominios discretos, continuos, algebraicos, geométricos, dinámicos y físicos.

La parte demostrable consiste en verificar, caso por caso, que dos expresiones determinan el mismo objeto.

La parte conjetural consiste en interpretar la red completa como arquitectura de compatibilidad entre teorías.

16. Síntesis final

ES_49 no afirma que N y R sean lo mismo.

Afirma algo más sutil y matemáticamente defendible:

$$N \rightarrow^n \alpha \xleftarrow{\infty dx} R \rightarrow 0$$

cuando existen construcciones discretas y continuas que determinan el mismo $\alpha \in R$.

La constante α actúa como invariante.

La clase U_α reúne las expresiones que determinan ese mismo valor.

En el caso de e :

$$N \rightarrow^n e \xleftarrow{\infty dx} R \rightarrow 0$$

En el caso de π :

$$N \rightarrow^n \pi \xleftarrow{\infty \Delta x} R \rightarrow 0$$

En el caso de φ :

$$N \rightarrow^n \varphi \xleftarrow{\infty \text{ algebra}} R \rightarrow 0$$

En el caso general:

$$U_{f_i} = \{F_j : \forall x \in D, F_j(x) = f_i(x)\}.$$

La potencia de ES_49 está en distinguir cuidadosamente:

1. dominio de construcción;
2. procedimiento;
3. expresión;
4. proceso límite;
5. valor exacto;
6. clase de equivalencia;
7. interpretación conjetural.

Con esta separación, el puente entre discreto y continuo deja de ser una afirmación vaga y se convierte en una estructura rigurosa:

distintos caminos pueden conservar un mismo objeto.

Ese objeto común es el nexo.