

Relatividad Holográfica

Determinista — Versión

Rigurosa (esqueleto)

o. Notación y objetivo

- c velocidad de la luz, h y $\hbar = h / 2\pi$ constantes de Planck.
- ℓ longitud holográfica (escala a definir por hipótesis).
- λ_h longitud de onda asociada a una masa: $\lambda_h = h / (Mc)$.
- Queremos: (i) definir n de forma física y matemática rigurosa; (ii) derivar las consecuencias formales para $g(n)$ y para el reemplazo $G \rightarrow g_{\text{hol}}$; (iii) separar demostraciones de conjeturas.

1. Supuestos (explícitos — deben mantenerse)

A1 (Holografía de confinamiento). El confinamiento físico de grados de libertad relevantes para la masa de una partícula se realiza en una **superficie** S de dimensión d_S (en nuestro caso $d_S = 2$).

A2 (Ondas y condiciones de contorno). Las excitaciones asociadas a una partícula se describen, en régimen apropiado, por un campo escalar ψ que satisface en la superficie S una ecuación de onda lineal homogénea (p. ej. $(\square_S + \kappa)\psi = 0$) con condiciones de contorno que definen un problema de valores propios auto-adjunto.

A3 (Estabilidad $\leftrightarrow$ modos estacionarios). Un estado es estable y permanente sólo si corresponde a un modo estacionario (autoparte temporal $e^{-i\omega t}$) del problema de valores propios en S .

A4 (Modo entero). Para garantizar estabilidad y conservación por simetrías de la frontera, definimos un número entero n que cuenta el número efectivo de ciclos/winding de la función de onda a lo largo de la(s) dirección(es) cerradas relevantes de S (esto requiere hipótesis geométricas que se hacen explícitas más abajo).

A5 (Empírica). Los valores observados de la gravedad están alineados con una ley exponencial en n , es decir, los datos sugieren $\log g(n)$ lineal en n . (Esta hipótesis será tratada como empírica/conjetural y usada sólo para ajustar constantes).

Comentario: si alguna de A1–A4 no se cumple en un modelo microscópico concreto, las proposiciones que siguen deben reinterpretarse en ese contexto.

2. Definición matemática de n

Bajo A2–A4, consideremos el problema de valores propios sobre la superficie cerrada S con métrica inducida g_{ab}^S . Sea Δ_S el laplaciano de S .

Buscamos soluciones separables de la forma

$\psi(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$, $(-\Delta_S + V(\mathbf{x}))\Phi = \lambda\Phi$, con condiciones de contorno auto-adjuntas en S . Denotemos por $\{\Phi_k\}$ la base ortonormal de autofunciones y $\{\lambda_k\}$ los autovalores discretos (ordenados).

Definición 2.1 (Número de modos efectivo n).

Si existe una dirección cerrada (o conjunto de ciclos independientes) γ en S tal que la autofunción relevante tiene un comportamiento oscilatorio dominante a lo largo de γ , podemos definir el número de ciclos n mediante

la condición de cuantización (en la aproximación eikonal o de onda estacionaria) $kL_\gamma = 2\pi n$, donde $k = \sqrt{\lambda}$ es el número de onda efectivo y L_γ la longitud geométrica del ciclo γ . Aquí $n \in \mathbb{Z}^+$ por construcción de ciclos completos.

Observación: esta definición es local y requiere la existencia de ciclos bien definidos donde la aproximación de onda plana sea válida. En superficies con alta curvatura o sin ciclos globales simples, se requiere una generalización (ver sección de Conjeturas).

3. Proposición (discreción de n por estabilidad)

Proposición 3.1. Bajo A2–A4 y si la frontera S admite una o varias direcciones cerradas $\{\gamma_i\}$ con longitudes L_i , los estados estacionarios físicamente estables están indexados por un conjunto de enteros $n_i \in \mathbb{Z}^+$ que cumplen $k_i L_i = 2\pi n_i$. En particular, el número total de ciclos efectivo n es entero.

Demostración (esquemática). El problema de valores propios en S es auto-adjunto $\Rightarrow$ espectro real y base discreta de autofunciones. En la aproximación semiclasica (WKB) sobre ciclos cerrados, la condición de fase bohr–sommerfeld $\oint k \, dl = 2\pi n$ es necesaria para obtener modos cuasi-estacionarios que se reproducen una vuelta tras otra sin interferencia destructiva. Por tanto n entero. (Detalles técnicos: requiere que la longitud de coherencia sea mayor que la escala de curvatura local y que no existan pérdidas dissipativas significativas; ver referencias estándar de WKB en variedades compactas). ■

Comentario técnico: la demostración completa exige hipótesis de regularidad y ausencia de dispersión hacia el exterior; éstas están recogidas en A1–A4.

4. Relación con masa y energía

Bajo la hipótesis de que la energía asociada al modo estacionario (n) se interpreta como masa M (relación de Planck–Einstein local), podemos escribir: $M(n) \sim \frac{h}{\lambda_h c}$, $\lambda_h \sim \frac{\alpha_1}{k(n)}$. La constante α_1 depende del modelo (p. ej. factores geométricos).

5. Definición y forma funcional propuesta de $g(n)$

Hecho empírico / ajuste inicial (conjetural). Los datos y los argumentos heurísticos conducen a modelar la familia de acoplamientos por $g(n) = A e^{-n}$ con A una normalización que puede fijarse por condiciones físicas (por ejemplo, exigir que $g(2)$ reproduzca la constante Newtoniana observable G , o que $A = \alpha \hbar c / \ell^2$ según una hipótesis holográfica más fuerte).

- Si se impone la coincidencia con Newton clásico: $g(2) = G \Rightarrow A = G e^2$.
- Alternativamente, si se adopta la forma holográfica $g(n) = (\alpha \hbar c / \ell^2) e^{-n}$, se deja explícito el origen micro-cópio del acoplamiento.

Nota de rigor: la relación exponencial es una **conjetura empírica** en tanto que requiere justificación teórica a partir de un modelo microfísico (por ejemplo, un conteo discreto de microestados cuyo número escala como e^n o una penalización energética por añadir modos). Hasta que exista ese derivación, la tratamos como hipótesis a contrastar.

6. Consecuencias formales (derivaciones condicionales)

Bajo las definiciones previas:

- Reemplazo en Einstein: $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi g(n)}{c^4} T_{\mu\nu}$. Expresando $g(n)$ por Ae^{-n} o por $(\alpha\hbar c / \ell^2)e^{-n}$ obtenemos fórmulas explícitas para radios de Schwarzschild, Friedmann, etc., que se pueden escribir de forma exacta en términos de $n, \ell, \alpha, \lambda_h$. (Estos pasos son algebraicos y se incluyen en el apéndice técnico.)
 - **Testabilidad:** fijando $n = 2$ y eligiendo A para reproducir G se obtienen predicciones coincidentes con GR a gran escala; variaciones en n conducen a desviaciones cuantificables que pueden compararse con datos PPN, ondas gravitacionales y cosmología.
-

7. Lo que podemos demostrar hoy (resumen)

- Bajo A1–A4 y con suposiciones regulares, los modos estacionarios sobre una frontera cerrada conducen a un índice entero n (Proposición 3.1).
 - El formalismo de valores propios en superficies compactas garantiza discreción del espectro y la posibilidad de aplicar condiciones de cuantización semiclasicas.
 - Dado un $g(n)$ funcional, las consecuencias para las métricas (Schwarzschild, FLRW) se deducen algebraicamente y son exactas (no heurísticas).
-

8. Lo que no podemos demostrar todavía (conjeturas a probar)

- Derivar desde primera-principios microfísicos (p. ej. un modelo de frontera cuántica, CFT o conteo de microestados) la forma exacta

$$g(n) = Ae^{-n}.$$

- Probar que para cualquier superficie S relevante físicamente la cantidad n definida por (Def. 2.1) exista y sea la variable que gobierna la fuerza gravitatoria universal.
 - Demostrar riguroso-mente la igualdad entre la energía del modo estacionario y la masa observada, más allá de escalas y factores de orden.
 - Justificar la elección específica $n = 2$ como estabilidad global (aunque hay argumentos físicos plausibles: 2D es la mínima dimensión de frontera para codificar área/entropía; se necesita una prueba dinámica de estabilidad de vacíos para cerrarlo).
-

9. Estrategia para completar las demostraciones (próximos pasos formales)

1. **Modelo microfísico:** proponer una teoría de frontera (p. ej. CFT o red cuántica discreta) donde se pueda contar microestados y derivar la penalización exponencial por modos.
 2. **Análisis espectral:** estudiar la familia de problemas $(-\Delta_S + V)\Phi = \lambda\Phi$ en superficies topológicas relevantes (esfera S^2 , toro T^2 , etc.) y relacionar n con índices topológicos (winding numbers, índices de Morse) en casos simétricos.
 3. **Estimación energética:** calcular la energía del modo estacionario en modelos sencillos (cavidad esférica, membrana) y comparar con la relación masa–longitud de onda.
 4. **Contraste observacional:** convertir la libertad de A, ℓ, α en límites numéricos usando tests PPN, LIGO, cosmología y datos de agujeros negros.
 5. **Publicación:** redactar artículos separando resultados demostrados de las conjeturas, con apéndices técnicos.
-

10. Apéndice técnico (esquema de derivaciones algebraicas)

(Se incluye derivación formal de Schwarzschild y Friedmann sustituyendo $G \mapsto g(n)$; se calcula $r_s(n)$ y se expone la forma del potencial newtoniano efectivo. Estas son manipulaciones algebraicas, válidas si se acepta $g(n)$.)

11. Conclusión (rigurosa y honesta)

- **Hecho demostrable:** la discreción de los modos estacionarios en una frontera auto-adjunta lleva a índices cuantizados $n \in \mathbb{Z}^+$.
 - **Hipótesis plausible pero no demostrada aún:** la familia $g(n)$ depende exponencialmente de n con la forma $g(n) = Ae^{-n}$. Eso demanda un modelo microscópico para ser una afirmación de primera-principios.
 - **Compromiso:** todas las afirmaciones del trabajo final deben etiquetarse como “Teorema/Proposición (demostrable bajo A1–A4)” o “Conjetura/Modelo (requerir derivación microfísica)”.
-